ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Dans cet exercice, n et r sont des entiers naturels avec n non nul ; on pose

$$I_{n,r} = \{k \in \{0,\dots,n\} \ ; \ 7 \text{ divise } (k-r)\} \quad \text{et} \quad S_r = \sum_{k\in I_{n,r}} C_n^k.$$

On considère le complexe $w = e^{2i\frac{\pi}{7}}$.

1. Calculer les deux sommes suivantes $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} C_n^{2k+1}$.

2. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on pose $\psi(k) = \displaystyle\sum_{p=0}^{6} w^{p(k-r)}$. Déterminer les valeurs de $\psi(k)$ selon les valeurs de k.

3. (a) Développer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{6}(1+w^p)^n w^{-pr}$ puis l'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de la famille $(\psi(0),\dots,\psi(n))$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{p=0}^{6}(1+w^p)^n w^{-pr} = 7\sum_{k\in I_{n,r}} C_n^k$.

4. (a) Pour $p \in \{1,2,3\}$, mettre le complexe $T_p = (1+w^p)^n w^{-rp}$ sous forme trigonométrique.

   (b) En regroupant chaque T_p avec son conjugué, exprimer $\displaystyle\sum_{p=0}^{6}(1+w^p)^n w^{-pr}$ comme somme de réels où interviennent les cosinus des multiples de $\alpha = \frac{\pi}{7}$ et $\beta = \frac{(n-2r)\pi}{7}$.

   (c) En déduire une expression de S_r.

5. On se place dans le cas particulier $n = 25$.

   (a) Montrer que $S_1 = S_3$, $S_0 = S_4$ et $S_5 = S_6$.

   (b) Donner une majoration du type $\left|\dfrac{7S_r}{2^n} - 1\right| \leqslant M$, où M est à déterminer en fonction de $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$, puis en déduire un encadrement de S_r.

PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M, relativement à la base $\mathcal{B}$, est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}.$$

I . Première partie

Dans cette partie, X, Y, et Z désignent trois réels et on pose $S = X + Y + Z$.

1. Déterminer, suivant les valeurs des réels $X,\ Y$ et Z, une base du noyau $\mathrm{Ker}\, u$ de u et précisez la dimension de ce sous-espace vectoriel. La matrice M est - elle inversible ?

2. (a) Calculer M^2.
   (b) À quelle condition sur $X,\ Y$ et Z la matrice M est-elle celle d'un projecteur ?
   (c) Montrer que si $S = 0$, alors M admet 0 pour unique valeur propre.
   (d) M est-elle diagonalisable si $S = 0$?
   (distinguer les cas $X = Y = Z = 0$ et $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$)

3. Dans cette question, on suppose que $S \neq 0$.
   (a) Montrer que les vecteurs $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3$, et $f_3 = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$ forment une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice Δ de u dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (c) En déduire que M est diagonalisable, et que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, S\}$.
   (d) On considère la matrice $K_\alpha = M - \alpha I_3$, où α est un réel.
      i. En écrivant M sous la forme $M = P\Delta P^{-1}$, où P est une matrice à préciser, montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ_α que l'on calculera, telle que $K_\alpha = P\Delta_\alpha P^{-1}$.
      ii. Pour quelles valeurs de X, Y et Z, la matrice K_α est-elle inversible ?
      iii. **Application :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
      En utilisant ce qui précède, montrer que A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres et dire si A est inversible.

II . Deuxième partie

Dans cette partie, X, Y et Z désignent trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p.

1. Rappeler les expressions de la loi, l'espérance et la variance de X. Calculer la fonction génératrice, G_X, de X. Déterminer la fonction génératrice de $X + Y$. En déduire que $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Quelle est la loi de la variable $S = X + Y + Z$?

2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice inversible ?

3. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

4. Soit T la variable aléatoire désignant le nombre de valeurs propres de la matrice M. Vérifier que $T(\Omega) = \{1, 2\}$. Donner la loi, l'espérance et la variance de T. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

5. On suppose que $p = \frac{1}{2}$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'au moins une des lignes de M soit égale à la somme des deux autres ?
   (on rappelle la formule $\sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{n+m}^r$, valable pour $(n, m, r) \in \mathbb{N}^3$ avec $r \leqslant n + m$)

   (b) Quelle est la probabilité que toutes les valeurs propres de M soient des entiers pairs ?

III . Troisième partie

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \lambda e^x e^{-\lambda e^x}$, avec $\lambda > 0$.

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit U une variable aléatoire de densité f et soit $V = \exp(U)$. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U. En déduire que V est une variable aléatoire à densité. Reconnaître la loi de V.

2. On suppose que X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où λ est un réel strictement positif.

   (a) Rappeler l'espérance et la variance de X.

   (b) Dire, sans chercher sa loi, pourquoi $X + Y$ ne peut suivre une loi exponentielle.

3. On rappelle que pour tout couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V la variable $W = U + V$ admet une densité f_W définie par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x - t)\, dt.$$

   (a) Vérifier que si U et V sont à valeurs positives, (c'est à dire si f_U et f_V sont nulle sur $\mathbb{R}^-$) alors

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = \int_{0}^{x} f_U(t) f_V(x - t)\, dt.$$

   (b) En déduire que $S = X + Y + Z$ est une variable aléatoire à densité et montrer qu'une densité de la variable aléatoire S est donnée par

$$f_S(x) = \begin{cases} \lambda^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

4. (a) Montrer que la probabilité que la matrice M ne soit pas diagonalisable, est nulle.

   (b) Quelle est la probabilité que M ait une valeur propre de valeur absolue supérieure à 1 ?

FIN DE L'ÉPREUVE